3. Énoncés des exercices

Exercice 3.1 Suites convergentes vers une limite finie
Méthode 1 : Application de la remarque 3.1.
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il faut et il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ (aussi petit que l'on veut), il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n de la suite seront dans l'intervalle $]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[$.
Or $u_n \in]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[\Leftrightarrow \ell-\epsilon < u_n < \ell+\epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < u_n - \ell < +\epsilon \Leftrightarrow |u_n-\ell| < \epsilon$.
En pratique, on va fixer un $\epsilon > 0$, et on va essayer de déterminer par le calcul un rang n_0 à partir duquel l'on a $|u_n-\ell| < \epsilon$ (ou $-\epsilon < u_n-\ell < +\epsilon$).
Pour cela, il faut d'abord essayer de "deviner" ℓ (on peut faire une conjecture en calculant les termes à la calculatrice, ou bien utiliser le théorème du point fixe quand on l'aura vu) : on cherche donc un "candidat limite". Parfois on a la chance que la valeur de ℓ soit donnée dans l'énoncé.
Ensuite, on étudie le comportement de $(u_n-\ell)$.
On écrit donc $|u_n-\ell| < \epsilon$, et on essaie d'en déduire une valeur de n_0 convenable (qui dépendra de ϵ).

1°) Démontrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 5 + \frac{1}{n}$ converge vers $\ell = 5$ lorsque $n \to +\infty$.
2°) Démontrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{3n^2+2}{n^2}$ converge vers $\ell = 3$ lorsque $n \to +\infty$.
3°) Démontrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 5 + \frac{7n+\sqrt{n}}{n}$ converge vers $\ell = 12$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3.2 Suites divergentes vers un infini
Méthode 2 : Application de la première partie de la définition 3.3.
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il faut et il suffit de montrer que pour tout $A > 0$ (aussi grand que l'on veut), il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont $> A$.
On écrit donc $u_n > A$, et on essaie d'en déduire par le calcul une valeur convenable de n_0 (qui dépendra de A).

1°)Démontrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n$ diverge vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
2°)Démontrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 3\sqrt{n}$ diverge vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
3°)Démontrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{n^2+1}{2}$ diverge vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3.3 Démontrer que les suites suivantes dont on donne le terme général sont convergentes (préciser leurs limites).
a) $u_n = \frac{sin(n)}{n}$ b) $v_n = \frac{n+cos(n)}{n}$

Exercice 3.4 Étudier la limite de la suite (u_n).
a) $u_n = 5-2n$ b) $u_n = \frac{3}{n^2}$ c) $u_n = 3n^2+2n+5-\frac{6}{n}$

Exercice 3.5 Déterminer les limites éventuelles des suites u, v et w dont on donne les termes généraux.
a) $u_n = n^2 - \frac{1}{n+1}$ b) $v_n = \frac{1}{n^2} - 2\sqrt{n}$ c) $w_n = \left(n-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{2n^2}\right)$

Exercice 3.6 Étudier la limite de la suite (u_n).
a) $u_n = 3n^2 - n + \frac{1}{n}$ b) $u_n = 1-6^n$ c) $u_n = 3^n - 2^n$

Exercice 3.7 Étudier la limite de la suite (u_n).
a) $u_n = 1 - 3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ b) $u_n = \frac{6}{5-7^n}$ c) $u_n = \frac{3^n-2}{4^n-3^n}$

Exercice 3.8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose : $u_n = 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n+(-1)^n}$
1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$: $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}$
2°) Déterminer la limite des suites de termes généraux : $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ et $\frac{\sqrt{n+1}}{n-1}$
3°) Conclure sur la limite de la suite (u_n)

Exercice 3.9 Démontrer que les suites u et v suivantes sont convergentes et déterminer leurs limites.
a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ b) $v_n = \frac{cosn}{n^2}$

Exercice 3.10 La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2n^2-3sinn}{n^2+1}$
1°) Donner une valeur approchée de u_{10} et u_{100}.
Que peut-on conjecturer concernant la limite éventuelle de la suite u ?
2°) Prouver que pour tout entier naturel n : $\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2n^2+3}{n^2+1}$

En déduire la limite de la suite u.
3°a) Justifier que pour tout entier n : $\frac{-5}{n^2+1} \leqslant u_n - 2 \leqslant \frac{1}{n^2+1}$
3°b) A partir de quel rang N est-on certain que pour tout $n \geqslant N$, la distance entre u_n et 2 est inférieure à 10^{-3} ?
3°c) A-t-on pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \leqslant 2$?

Exercice 3.11 On considère la suite w définie par $w_0 = 0,6$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,7w_n + 0,1$.
1°) Justifier que pour tout entier n, on a : $0 \leqslant w_n \leqslant 1$
2°) Démontrer que la suite w est monotone.
3°) En déduire que la suite w est convergente. Préciser la valeur de sa limite.

Exercice 3.12 On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$.
Démontrer que la suite u est bornée (*on pourra dans un premier temps conjecturer à la calculatrice un minorant et un majorant de u, soit en calculant des valeurs de la suite, soit en utilisant une représentation graphique ; mais une telle conjecture n'a pas valeur de preuve et il faudra en suite faire une démonstration rigoureuse*).

Exercice 3.13 On considère une suite u. Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite u.
a) $u_n = n^2 + (-1)^n n$ b) $u_n = (cos(n) - 2) \times n$

Exercice 3.14 On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$
1°) Soit un entier $n \geqslant 1$. Justifier que pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$
2°) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
3°) Déterminer la limite de la suite u_n.